$$I_{n+2} + (n+2)(n+3)I_n = (n+3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}$$

4°/ D'après la relation précédente on a :

pour $n = 1$;

$$I_3 + 12I_1 = 4\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \Rightarrow I_3 = \frac{\pi^3}{2} - 12(\pi - 2) = \frac{\pi^3}{2} - 12\pi + 24$$

C- 1°/ a) * Pour $x > 0$: $\left|\int_0^x th(t)dt\right| \leq \int_0^x |th(t)|dt$

Or $\forall t \in [0,x]: |h(t)| \leq M$ et $|t| = t$ donc $\forall t \in [0,x]: |th(t)| \leq Mt$

En intégrant sur $[0,x]$ on obtient : $\left|\int_0^x th(t)dt\right| \leq \int_0^x Mtdt$

or $\int_0^x Mtdt = M\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{Mx^2}{2}$ d'où $\left|\int_0^x th(t)dt\right| \leq \frac{Mx^2}{2}$

* Pour $x < 0$; pour tout réel $t \in [x,0]: |h(t)| \leq M$ et $|t| = -t$

donc $\forall t \in [x,0]: |th(t)| \leq -Mt \Rightarrow \left|\int_0^x th(t)dt\right| = \left|\int_x^0 th(t)dt\right| \leq -\int_x^0 Mtdt$

or $-\int_x^0 Mtdt = M\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{Mx^2}{2}$ d'où $\left|\int_0^x th(t)dt\right| \leq \frac{Mx^2}{2}$

Conclusion : $\forall x \in \mathrm{R}^*$; $\left|\int_0^x th(t)dt\right| \leq \frac{Mx^2}{2}$

b) On a : $\forall x \in \mathrm{R}^*$; $\left|\int_0^x th(t)dt\right| \leq \frac{Mx^2}{2} \Rightarrow \frac{2}{|x|}\left|\int_0^x th(t)dt\right| \leq \frac{Mx^2}{|x|}$

$\Rightarrow \left|\int_0^x \frac{2}{x} th(t)dt\right| \leq M|x|$ donc $\forall x \in \mathrm{R}^*; \psi(x) \leq M|x|$ or

$\lim_{x\to 0} M|x| = 0$ d'où $\lim_{x\to 0} \psi(x) = 0$ si $h(0) = 0$ alors $\lim_{x\to 0} \psi(x) = \psi(0)$

ce qui prouve que ψ est continue en 0.